impide seleccionar el punto medio de $[0, \pi/4]$ y evaluar f en ese punto, y por ello reducir aún más el intervalo que contiene a c. Este proceso puede continuar de manera indefinida hasta que encontremos que c está en un intervalo suficientemente pequeño. Este método para obtener una solución se denomina *método de bisección*, y los estudiaremos en la sección 3.7. ■

El teorema del valor intermedio también puede conducir a algunos resultados sorprendentes.

EJEMPLO 9 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en un anillo circular siempre existen dos puntos opuestos con la misma temperatura.

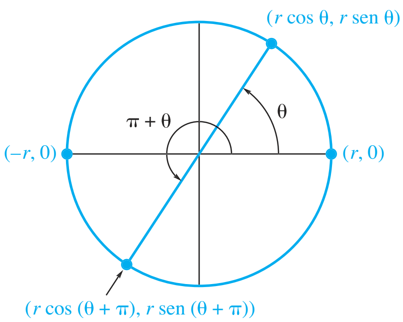

Figura 12

SOLUCIÓN Elija coordenadas para este problema de modo que el centro del anillo sea el origen, y sea r el radio del anillo. (Véase la figura 12). Defina $T(x, y)$ como la temperatura en el punto (x, y). Considere un diámetro del círculo que forma un ángulo θ con el eje x y defina $f(\theta)$ como la diferencia de las temperaturas entre los puntos que forman ángulos de θ y $\theta + \pi$, esto es,

$$f(\theta) = T(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) - T(r\cos(\theta + \pi), r\operatorname{sen}(\theta + \pi))$$

Con esta definición

$$f(0) = T(r, 0) - T(-r, 0)$$
$$f(\pi) = T(-r, 0) - T(r, 0) = -\left[T(r, 0) - T(-r, 0)\right] = -f(0)$$

Así, $f(0)$ y $f(\pi)$ son cero, o una es positiva y la otra es negativa. Si ambas son cero, entonces hemos encontrado los dos puntos requeridos. De otra forma, podemos aplicar el teorema del valor intermedio. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua, concluimos que existe c entre 0 y π, tal que $f(c) = 0$. Así, para los dos puntos con ángulos c y $c + \pi$, las temperaturas son iguales. ■

Revisión de conceptos

1. Una función f es continua en c si _______ $= f(c)$.

2. La función $f(x) = [\![x]\!]$ es discontinua en _______.

3. Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y si _______ y _______.

4. El teorema del valor intermedio dice que si una función f es continua en $[a, b]$ y W es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre _______ y _______ tal que _______.

Conjunto de problemas 1.6

En los problemas del 1 al 15 establezca si la función indicada es continua en 3. Si no es continua, diga por qué.

1. $f(x) = (x - 3)(x - 4)$

2. $g(x) = x^2 - 9$

3. $h(x) = \dfrac{3}{x - 3}$

4. $g(t) = \sqrt{t - 4}$

5. $h(t) = \dfrac{|t - 3|}{t - 3}$

6. $h(t) = \dfrac{|\sqrt{(t - 3)^4}|}{t - 3}$

7. $f(t) = |t|$

8. $g(t) = |t - 2|$

9. $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

10. $f(x) = \dfrac{21 - 7x}{x - 3}$

11. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 - 27}{t - 3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

12. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 - 27}{t - 3} & \text{si } t \neq 3 \\ 23 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} t - 3 & \text{si } t \leq 3 \\ 3 - t & \text{si } t > 3 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} t^2 - 9 & \text{si } t \leq 3 \\ (3 - t)^2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -3x + 7 & \text{si } x \leq 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

16. Con base en la gráfica de g (véase la figura 13), indique los valores en donde g es discontinua. Para cada uno de estos valores establezca si g es continua por la derecha, por la izquierda o ninguna.

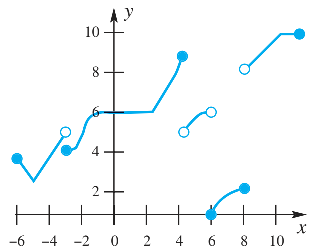

Figura 13

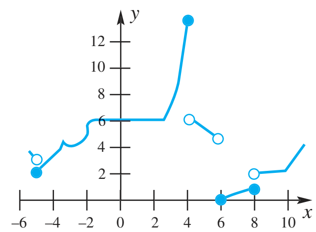

Figura 14

17. A partir de la gráfica de h dada en la figura 14, indique los intervalos en los que h es continua.

En los problemas del 18 al 23 la función dada no está definida en cierto punto. ¿Cómo debe definirse para hacerla continua en ese punto? (Véase el ejemplo 1).

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$ **19.** $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{3 - x}$

20. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ **21.** $H(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$

22. $\phi(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1}$ **23.** $F(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

En los problemas del 24 al 35, ¿en qué puntos, si los hay, las funciones son discontinuas?

24. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{(x - 30)(x - \pi)}$

25. $f(x) = \dfrac{33 - x^2}{x\pi + 3x - 3\pi - x^2}$

26. $h(\theta) = |\operatorname{sen}\theta + \cos\theta|$ **27.** $r(\theta) = \tan\theta$

28. $f(u) = \dfrac{2u + 7}{\sqrt{u + 5}}$ **29.** $g(u) = \dfrac{u^2 + |u - 1|}{\sqrt[3]{u + 1}}$

30. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$ **31.** $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

32. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

34. $f(t) = [\![t]\!]$ **35.** $g(t) = [\![t + \frac{1}{2}]\!]$

36. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[-2, 2]$.

(b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$.

(c) Es discontinua en -1 y 1.

(d) Es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1.

37. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 2]$ y sea continua en $[0, 2)$, pero no en $[0, 2]$.

38. Bosqueje la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $[0, 2]$ y en $(2, 6]$, pero que no sea continua en $[0, 6]$.

39. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $(0, 6)$ pero no en $[0, 6]$.

40. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ si es irracional} \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de esta función lo mejor que pueda y decida en dónde es continua.

En los problemas del 41 al 48 determine si la función es continua en el punto dado c. Si la función no es continua, determine si la discontinuidad es removible o no removible.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ c = 0$ **42.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 100}{x - 10};\ c = 10$

43. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x};\ c = 0$ **44.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x};\ c = 0$

45. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ **46.** $F(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x};\ c = 0$

47. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x};\ c = 0$ **48.** $f(x) = \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}};\ c = 4$

49. Una compañía de teléfonos celulares cobra \$0.12 por hacer una llamada más \$0.08 por minuto o fracción (por ejemplo, una llamada telefónica que dure 2 minutos y 5 segundos cuesta \$0.12 + 3 × \$0.08). Haga el bosquejo de una gráfica del costo de una llamada como función de la duración t de la llamada. Analice la continuidad de esta función.

50. Una compañía que renta automóviles cobra \$20 por día, con 200 millas incluidas. Por cada 100 millas adicionales, o cualquier fracción de éstas, la compañía cobra \$18. Haga el bosquejo de una gráfica del costo por la renta de un automóvil durante un día como función de las millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

51. Una compañía de taxis cobra \$2.50 durante el primer cuarto de milla y \$0.20 por cada $\frac{1}{8}$ de milla adicional. Haga un bosquejo del costo de un viaje en taxi como función del número de millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

52. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

53. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $(\cos t)t^3 + 6\operatorname{sen}^5 t - 3 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 2π.

GC **54.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 5]$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ en $[0, 5]$. En realidad, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

GC **55.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $\sqrt{x} - \cos x = 0$ tiene una solución entre 0 y $\pi/2$. Haga un acercamiento de la gráfica de $y = \sqrt{x} - \cos x$ para determinar un intervalo que tenga longitud 0.1 y que contenga esta solución.

56. Demuestre que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

57. Pruebe que f es continua en c si y sólo si $\lim_{t \to 0} f(c + t) = f(c)$.

58. Demuestre que si f es continua en c y $f(c) > 0$, existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(x) > 0$ en este intervalo.

59. Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$ y ahí satisface $0 \le f(x) \le 1$, entonces f tiene un *punto fijo*; esto es, existe un número c en $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* aplique el teorema del valor intermedio a $g(x) = x - f(x)$.

60. Encuentre los valores de a y b de modo que la siguiente función sea continua en todas partes.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

61. Una liga estirada cubre el intervalo [0, 1]. Los extremos se sueltan y la liga se contrae de modo que cubre el intervalo $[a, b]$ con $a \ge 0$ y $b \le 1$. Demuestre que esto resulta en un punto de la liga (en realidad exactamente un punto) que estará en donde estaba originalmente. Véase el problema 59.

62. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Entonces $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$ y $f(2) = 1$. ¿El teorema del valor intermedio implica la existencia de un número c entre -2 y 2, tal que $f(c) = 0$? Explique.

63. Iniciando a las 4 a. m., un excursionista escala lentamente hacia la cima de una montaña, a donde llega al mediodía. Al día siguiente, regresa a por la misma ruta, iniciando a las 5 a. m.; a las 11 de la mañana llega al pie de la montaña. Demuestre que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

64. Sea D una región acotada, pero arbitraria en el primer cuadrante. Dado un ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi/2$, D puede ser circunscrita por medio de un rectángulo cuya base forme un ángulo θ con el eje x, como se muestra en la figura 15. Demuestre que para algún ángulo este rectángulo es un cuadrado. (Esto significa que *cualquier* región acotada puede ser encerrada dentro de un *cuadrado*).

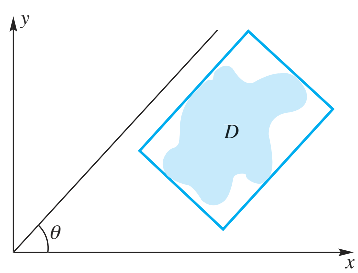

Figura 15

65. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{GMmr}{R^3}, & \text{si } r < R \\ \dfrac{GMm}{r^2}, & \text{si } r \ge R \end{cases}$$

Aquí, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r?

66. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y nunca es cero allí. ¿Es posible que f cambie de signo en $[a, b]$? Explique.

67. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda x y y, y suponga que f es continua en $x = 0$.

(a) Demuestre que f es continua en todas partes.

(b) Demuestre que existe una constante m, tal que $f(t) = mt$ para toda t (véase el problema 43 de la sección 0.5).

68. Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo, entonces también lo es la función $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$.

69. Demuestre que si $g(x) = |f(x)|$ es continua, no necesariamente es cierto que $f(x)$ sea continua.

70. Sea $f(x) = 0$, si x es irracional, y sea $f(x) = 1/q$, si x es el número racional p/q en su mínima expresión ($q > 0$).

(a) Dibuje, lo mejor que pueda, la gráfica de f en (0, 1).

(b) Demuestre que f es continua en cada número irracional en (0, 1), pero es discontinua en cada número racional en (0, 1).

71. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x (véase la figura 16). Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

(a) Determine el dominio y rango de f.

(b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua?

(c) Identifique cualesquiera puntos fijos de f (véase el problema 59).

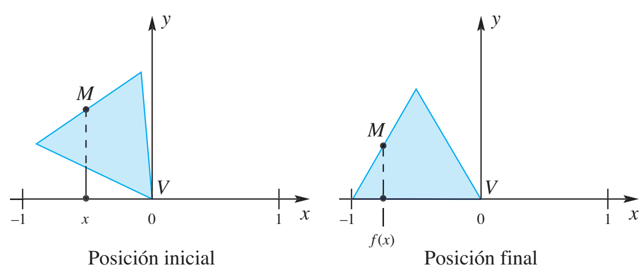

Figura 16

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x \to c} f(x)$ **2.** Todos los enteros **3.** $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ **4.** a; b; $f(c) = W$

1.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

A cada una de las siguientes aseveraciones responda con verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

1. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, entonces $f(c)$ existe.

4. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que $0 < |x| < \delta$ implica $|f(x)| < \varepsilon$.

5. Si $f(c)$ no está definida, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

6. Las coordenadas del agujero en la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ son (5, 10).

7. Si $\pi(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no existe.

9. Para todo número real c, $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$.

10. $\tan x$ es continua en todo punto de su dominio.